Convergenza all'equilibrio per sistemi deterministici

Montecatini, 27-10-2001

I moti complessi sono *semplici* (a volte)

Consideriamo sistemi *caotici* $T : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ con moti complessi.
Esempio

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sia $\mathcal{O}$ lo spazio degli osservabili allora la dinamica su $\mathcal{O}$ è definita da $T_* f := f \circ T$. Siano $\mathcal{F}$ i funzionali allora $\langle \mathcal{L}h, f \rangle = \langle h, T_* f \rangle$.

Convergenza all'equilibrio significa che existe $h_* \in \mathcal{F}$ tale che per ogni $h \in \mathcal{F}$ si ha $\lim_{n \to \infty} \mathcal{L}^n h = h_*$. Cioè un punto fisso attrattivo, nulla di più semplice.

Reversibilità e irreversibilità

Nell'esempio sia

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

allora $A^{-1} = S^{-1} A S$, dunque $\sigma(A) = \sigma(A^{-1})$. Se $\tilde{S}$ è l'azione di S in $\mathcal{F}$ allora, *formalmente*, $\mathcal{L}^{-1} = \tilde{S}^{-1} \mathcal{L} \tilde{S}$. Ma se c'è convergenza all'equilibrio deve essere $\sigma(\mathcal{L}) \neq \sigma(\mathcal{L}^{-1})$. Che succede?

Per capirlo è necessario definire con più esattezza chi sono $\mathcal{O}$ ed $\mathcal{F}$.

Instabilità dello spettro

In fatti, $\sigma(\mathcal{L})$ dipende drasticamente dallo spazio su cui è considerato. Vediamolo nell'esempio.

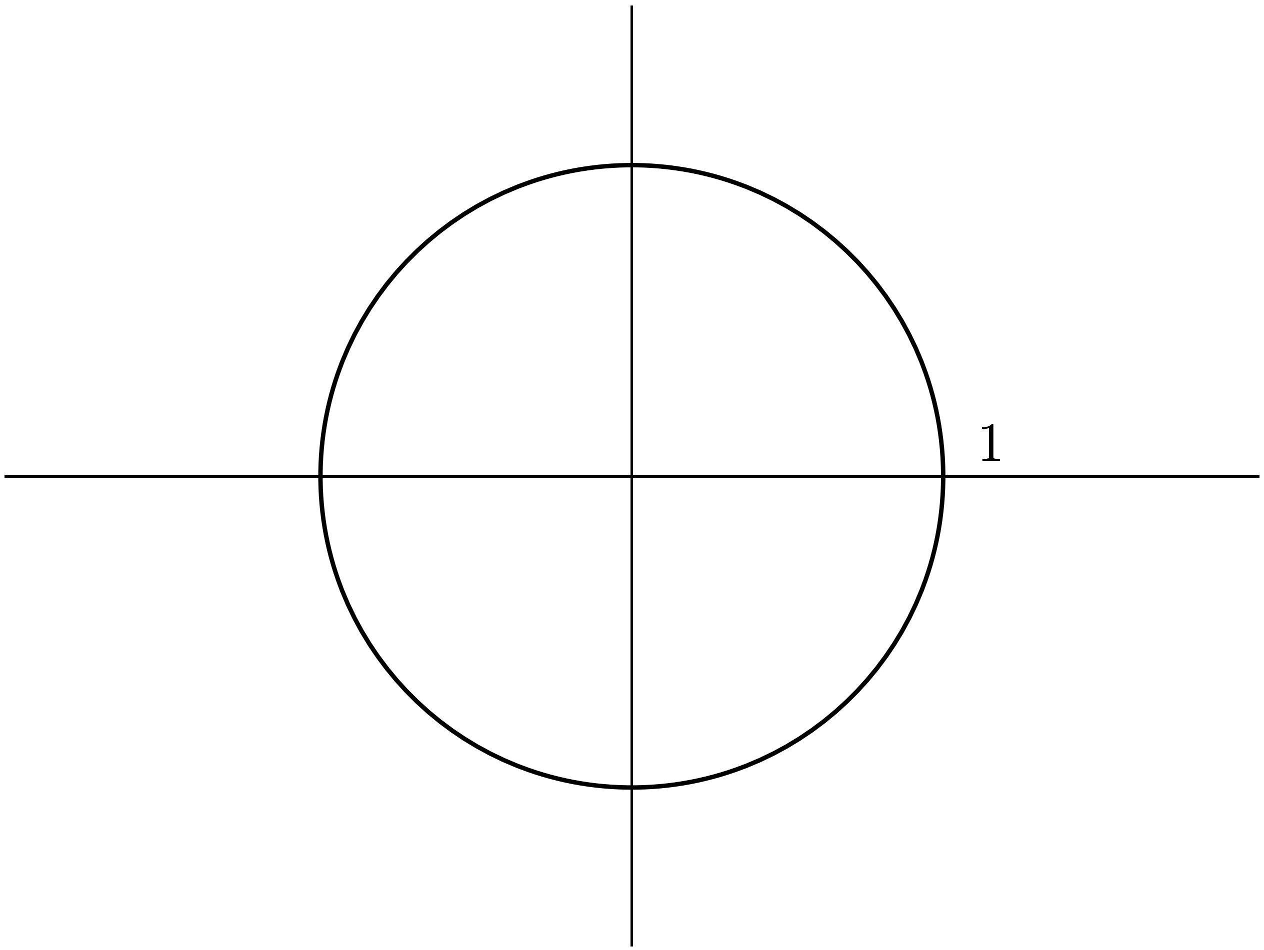

Figure 1: Spectrum of $\mathcal{L}$ on L^p.

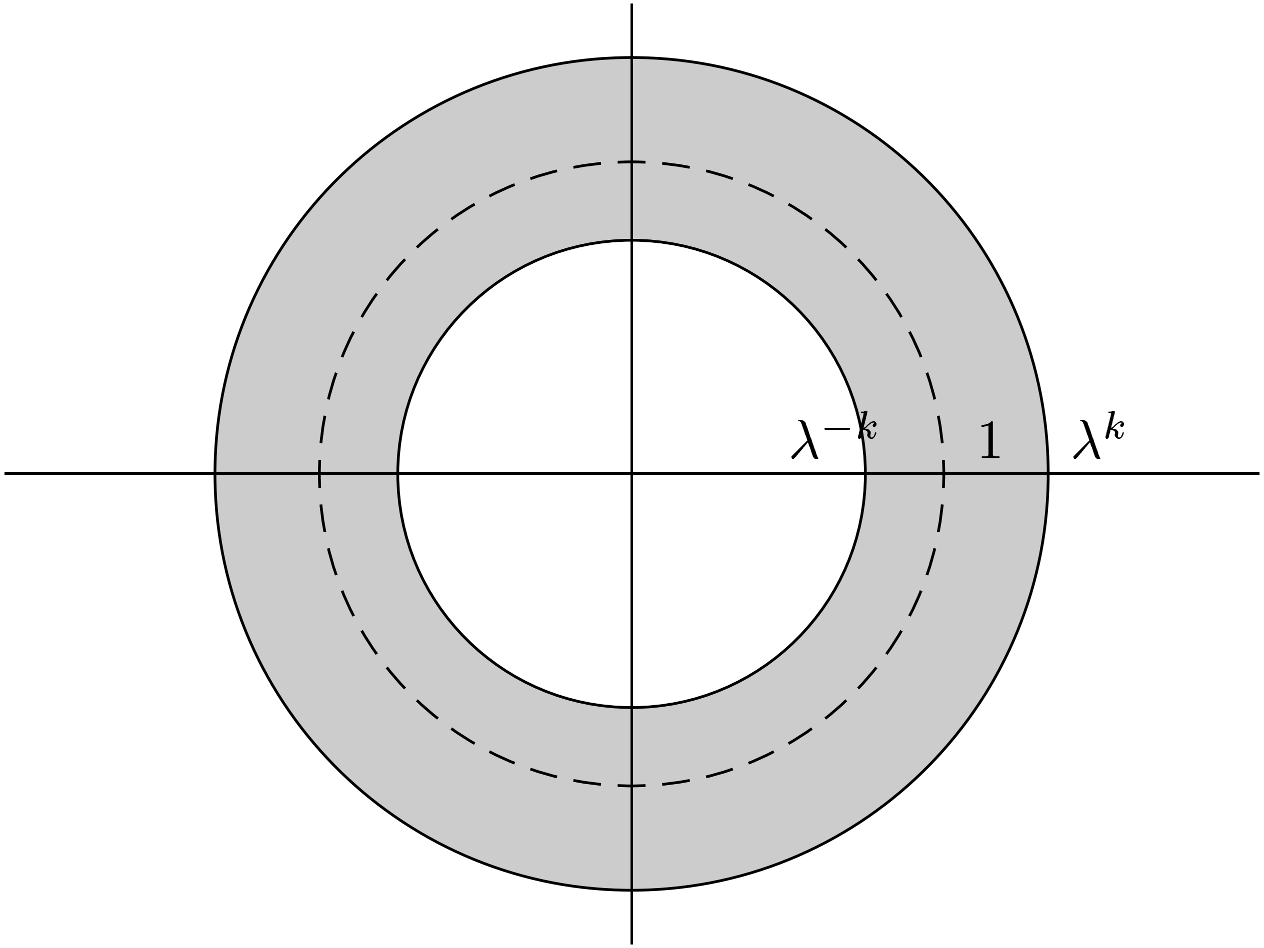

Figure 2: Spectrum of $\mathcal{L}$ on $\mathcal{C}^{(k)}$.

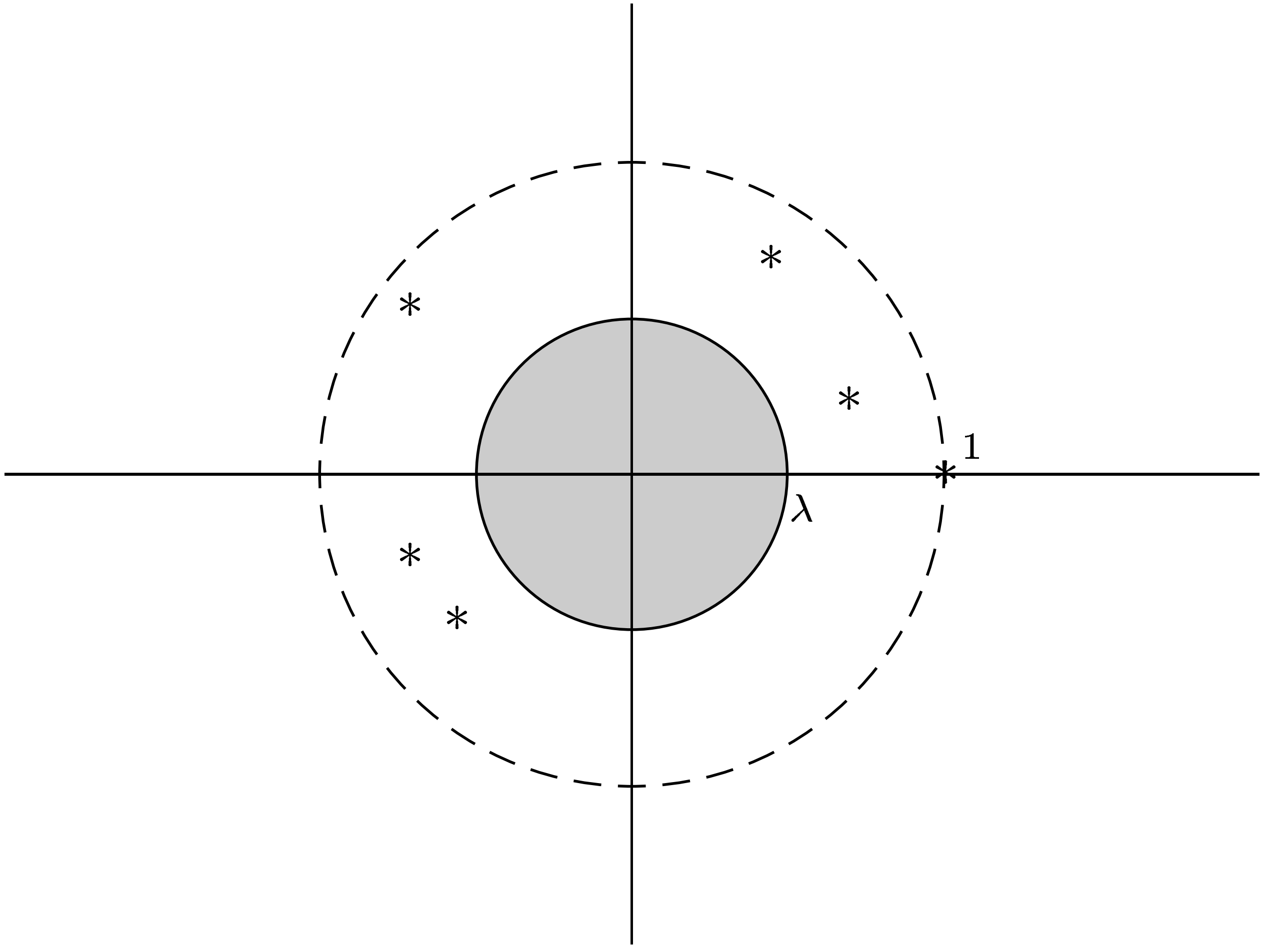

Figure 3: Spettro di $\mathcal{L}$ sullo spazio *fisico*

$\mathcal{O} \supset$ funzioni $\mathcal{C}^\infty$

$\mathcal{F} \supset$ misure assolutamente continue risptetto a Lebesgue con densità $\mathcal{C}^\infty$.

Inltre devono contenere tutti gli oggetti realizzabili come limiti dalla dinamica (nel *futuro*). Assumiamo che questi siano i soli osservabili e stati realizzabili fisicamente, dunque non ha senso considerare spazi più ampi.

Cosi facendo si scopre che $\tilde{S}$ è un operatore illimitato.

Qualunque sia la direzione del tempo, si vede sempre la stessa cosa!

Si scelga una direzione del tempo. Questa determina gli spazi $\mathcal{O}$ ed $\mathcal{F}$. In tale spazio si ha un punto fisso attrattivo.

Vedere un comportamento differente richiede la preparazione di uno stato che non appartiene a $\mathcal{F}$ e dunque non fisicamente realizzabile.

Stabilità

Ovviamente questo punto di vista puo essere valido solo se insensibile a piccole perturbazioni.

Una perturbazione cambia non solo ma dinamica ma anche gli spazi di stati ed osservabili *fisicamente realizzabili*.

Cionnonostante è possibile dimostrare la necessaria stabilità per una vasta classe di sistemi (Anosov).