

Fisica Matematica I

Secondo Appello, Sessione Autunnale, 20-01-25

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 10 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Si consideri un disco omogeneo di massa M e raggio R , in un piano verticale sottoposto ad una forza costante $(E, 0)$. Il disco può rotolare sull'asse orizzontale col suo punto di contatto avente velocità nulla. Si studi il moto sapendo che al tempo zero il disco è fermo col punto di contatto nell'origine.
2. Si considerino due punti materiali, in un piano orizzontale, di massa m e $2m$ e di posizione $\xi, \eta \in \mathbb{R}^2$ rispettivamente. Si assuma che interagiscano attraverso un potenziale

$$V_i(\xi, \eta) = \frac{K}{2}(1 - \|\xi - \eta\|)^2$$

e siano entrambi sottoposti ad un potenziale esterno V limitato, ovvero $\|V\|_\infty = L < \infty$. Data la condizione iniziale $\xi = 0$, $\eta = (1, 0)$, $\dot{\xi} = 0$, $\dot{\eta} = (1, 0)$ si caratterizzi il moto nel limite $K \rightarrow \infty$.

3. Dati i punti $a, b \in \mathbb{R}^d$ si mostri che la retta ha la lunghezza minima tra le curve differenziabili che uniscono tali punti.

Soluzione

1. Sia x la coordinata del centro del disco e sia θ l'angolo con la verticale di un punto preassegnato del disco. Ne segue che la velocità del punto di contatto con l'asse x sarà $\dot{x} + R\dot{\theta}$. Quindi la condizione che il disco non strisci, ovvero che il punto di contatto sia fermo, equivale a $\dot{x} = -R\dot{\theta}$. Scegliendo opportunamente il punto contrassegnato del disco possiamo quindi scrivere $\theta = R^{-1}x \pmod{2\pi}$. Abbiamo dunque la Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \frac{M}{2}\dot{x}^2 + \frac{I}{2}\dot{\theta}^2 + Ex = \frac{3}{4}M\dot{x}^2 + Ex,$$

infatti l'effetto della forza di gravità sul disco è equivalente alla forza applicata sul centro del disco, tuttavia la coordinata verticale del centro del disco è vincolata all'altezza R . Da cui si ottiene $x(t) = \frac{E}{3M}t^2$.

2. La lagrangiana del sistema è data da

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2}\dot{\xi}^2 + m\dot{\eta}^2 - \frac{K}{2}(1 - \|\xi - \eta\|)^2 - V(\xi) - V(\eta).$$

Risulta conveniente introdurre le coordinate del centro di massa $x = \frac{1}{3}(\xi + 2\eta)$ e $y = \eta - \xi$. Ovvero $\eta = x + \frac{1}{3}y$, $\xi = x - \frac{2}{3}y$ e

$$\mathcal{L} = \frac{3m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{3}\dot{y}^2 - \frac{K}{2}(1 - \|y\|)^2 - V\left(x + \frac{1}{3}y\right) - V\left(x - \frac{2}{3}y\right)$$

e l'Hamiltoniana associata è

$$\mathcal{H} = \frac{3m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{3}\dot{y}^2 + \frac{K}{2}(1 - \|y\|)^2 + V\left(x + \frac{1}{3}y\right) + V\left(x - \frac{2}{3}y\right).$$

Poichè al tempo zero $\mathcal{H} \leq \frac{m}{2} + 2L =: E_0$, la conservazione della energia implica che, per tutti i tempi, $\frac{K}{2}(1 - \|y\|)^2 \leq E_0$, ovvero $|\|y\| - 1| \leq \sqrt{\frac{2E_0}{K}}$. È dunque naturale introdurre le coordinate $y = \rho v(\theta)$, $v(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta)$. Da cui

$$\mathcal{L} = \frac{3m}{2}\dot{x}^2 + \frac{m}{3}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2) - \frac{K}{2}(1 - \rho)^2 - V\left(x + \frac{1}{3}\rho v(\theta)\right) - V\left(x - \frac{2}{3}\rho v(\theta)\right)$$

Possiamo quindi scrivere le equazioni di Eulero lagrange per x e θ

$$\begin{aligned} 3m\ddot{x} &= -\nabla V\left(x + \frac{1}{3}\rho v(\theta)\right) - \nabla V\left(x - \frac{2}{3}\rho v(\theta)\right) \\ \frac{2m}{3}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}) &= -\partial_{\theta}\left[V\left(x + \frac{1}{3}\rho v(\theta)\right) + V\left(x - \frac{2}{3}\rho v(\theta)\right)\right]. \end{aligned}$$

Ovvero

$$\begin{aligned} 3m\ddot{x} &= -\nabla V\left(x + \frac{1}{3}\rho v(\theta)\right) - \nabla V\left(x - \frac{2}{3}\rho v(\theta)\right) \\ \frac{2m}{3}\rho^2\dot{\theta}(s) &= -\int_0^t \partial_{\theta}\left[V\left(x(s) + \frac{1}{3}\rho(s)v(\theta(s))\right) + V\left(x(s) - \frac{2}{3}\rho(s)v(\theta(s))\right)\right] ds. \end{aligned}$$

Si noti che le quazioni sopra dipendono da K solo attraverso ρ . D'altro canto

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \|\rho - 1\|_{\infty} = 0.$$

Ne segue che le possiamo prendere il limite e ottenere

$$\begin{aligned} 3m\ddot{x} &= -\nabla V\left(x + \frac{1}{3}v(\theta)\right) - \nabla V\left(x - \frac{2}{3}v(\theta)\right) \\ \frac{2m}{3}\ddot{\theta}(s) &= -\int_0^t \partial_\theta \left[V\left(x(s) + \frac{1}{3}v(\theta(s))\right) + V\left(x(s) - \frac{2}{3}v(\theta(s))\right) \right] ds. \end{aligned}$$

Si calcolano facilmente le condizioni iniziali $x(0) = a := \frac{2}{3}(1, 0)$, $\dot{x}(0) = a$, $\theta(0) = \dot{\theta}(0) = 0$. Quindi il moto limite esiste ed è determinato dalle equazioni

$$\begin{aligned} \rho &= 1 \\ 3m\ddot{x} &= -\partial_x W(x, \theta) \\ \frac{2m}{3}\ddot{\theta}(s) &= -\partial_\theta W(x, \theta) \\ x(0) &= \dot{x}(0) = a \\ \theta(0) &= \dot{\theta}(0) = 0, \end{aligned}$$

dove $W(x, \theta) = V\left(x(s) + \frac{1}{3}v(\theta)\right) + V\left(x(s) - \frac{2}{3}v(\theta)\right)$.

3. Si noti che se $x \in \mathcal{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^d)$, $x(\alpha) = a$, $x(\beta) = b$ e $s : [\alpha, \beta] \rightarrow [\alpha', \beta']$ è un diffeomorfismo allora, ponendo $z(t) = x(s(t))$ si ha

$$\int_{\alpha'}^{\beta'} \|\dot{z}(\tau)\| d\tau = \int_{\alpha'}^{\beta'} \|\dot{x}(s(\tau))\| |s'(\tau)| d\tau = \int_{\alpha}^{\beta} \|\dot{x}(t)\| dt.$$

Overo, la lunghezza di una curva non dipende dalla parametrizzazione. Possiamo quindi parametrizzare le curve in modo che il dominio sia l'intervallo $[0, 1]$. Abbiamo quindi lo spazio di curve

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}^d) : x(0) = a, x(1) = b\}$$

e la funzione lunghezza $\ell : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$ definita da

$$\ell(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(t)\| dt.$$

Si noti che

$$\ell(x) = \int_0^1 \|\dot{x}(s)\| ds \geq \left\| \int_0^1 \dot{x}(s) ds \right\| = \|b - a\|.$$

Poichè la retta $x(t) = a + (b - a)t \in \mathcal{M}$ soddisfa $\ell(x) = \|b - a\|$, ne segue che la retta minimizza la lunghezza e questo conclude la dimostrazione.