

Calcolo II

Esame del 13/06/2024

Cognome..... Nome.....

Avete 3:00 ore di tempo. Ogni esercizio vale 6 punti. Solo le **risposte chiaramente giustificate** saranno prese in considerazione. Le parti degli elaborati scritte in maniera **disordinata** o **incomprensibile** saranno **ignorate**.

1. Dato un vettore $v \in \mathbb{R}^2$, $\|v\| = 1$, si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{\langle x, v \rangle^2} - 1}{\|x\|^2} & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

- Per quali x la funzione f è continua?
- Per quali x la funzione f è differenziabile?
- Se $v = (1, 0)$, per quali $x = (x_1, x_2)$ esiste $\partial_{x_2} f$?

2. Si trovino gli zeri del polinomio

$$p(x) = x^{11} + 3x^5 + 4x - 5$$

con una precisione di almeno 0.1.

3. Si calcoli il volume della regione

$$\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 - x + y^2 \leq 0\}.$$

4. Si calcoli l'integrale

$$\int_{\Delta} e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy$$

dove Δ è il triangolo di vertici $\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$.

5. Si risolva l'equazione differenziale

$$\dot{y} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} y$$
$$y(0) = (1, 0).$$

Soluzione

1. La funzione è differenziabile per tutti gli $x \neq (0, 0)$ poichè è la composizione di funzioni differenziabili. Per sapere se è continua occorre studiare il limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\langle x, v \rangle^2} - 1}{\|x\|^2}$$

Si noti che se $v^\perp$, $\|v^\perp\| = 1$, è perpendicolare a v allora

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\langle tv^\perp, v \rangle^2} - 1}{t^2} = 0$$

Mentre

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\langle tv, v \rangle^2} - 1}{t^2} = 1.$$

Dunque il limite non esiste e la funzione non è continua in zero. Rimane da studiare la derivata parziale in $(0, 0)$. Chiaramente $\partial_{x_2} f(0, 0)$ esiste solo se esiste il limite

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(t(0, 1)) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{\langle t(0, 1), (1, 0) \rangle^2} - 1}{t^3} = 0$$

Dunque $\partial_{x_2} f(x)$ esiste per tutti gli $x \in \mathbb{R}^2$.

2. Si ha $p'(x) = 11x^{10} + 15x^4 + 4 > 0$. Dunque p è crescente e quindi può avere un solo zero. D'altro canto $p(0) = -4$ e $p(1) = 2$, dunque lo zero deve appartenere all'intervallo $[0, 1]$. Per trovarlo usiamo l'algoritmo di Newton: poniamo $x_0 = 1$ e

$$x_{n+1} = x_n - \frac{p(x_n)}{p'(x_n)} = f(x_n).$$

Dunque

$$x_1 = 1 - \frac{3}{30} = \frac{9}{10}$$

$$x_2 \sim 0.861233$$

Sembra quindi che lo zero sia vicino a 0.9. Se calcoliamo $p(0.9) \sim 0.7$ e $p(0.8) \sim -0.7$, ovvero lo zero deve appartenere all'intervallo $[0.8, 0.9]$.

3. Usiamo le coordiante

$$x = \rho \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \theta$$

$$z = z$$

In tali coordiante $\Omega = \{\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \rho \leq \cos \theta; z^2 \leq 1 - \rho^2\}$. Dunque, per simmetria,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} dx dy dz &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} d\rho \rho \int_0^{\sqrt{1-\rho^2}} dz = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\cos \theta} d\rho \rho \sqrt{1-\rho^2} \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{(\cos \theta)^2} du \sqrt{1-u} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \frac{2}{3} (1 - |\sin^3 \theta|) \\ &= \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \theta d\theta = \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}. \end{aligned}$$

4. È conveniente fare il cambio di variabili $z = y - x$, $w = y + x$. Nelle nuove variabili il dominio di integrazione diventa il triangolo T di vertici $\{(0,0), (-1,1), (1,1)\}$ e si può quindi scrivere

$$\int_{\Delta} e^{\frac{y-x}{y+x}} dx dy = \frac{1}{2} \int_T e^{\frac{z}{w}} dz dw = \frac{1}{2} \int_0^1 dw \int_{-w}^w dz e^{\frac{z}{w}} = \frac{e - e^{-1}}{2} \int_0^1 w dw = \frac{e - e^{-1}}{4}.$$

5. Gli autovalori della matrice sono $2, -1$. Troviamo gli autovettori: l'autovettore associato a 2 è $(1,0)$, quello associato a -1 è $(1,-3)$. Quindi la soluzione generale dell'equazione è

$$y(t) = ae^{2t}(1,0) + be^{-t}(1,-3).$$

Dunque la soluzione determinata dalla condizione iniziale è $y(t) = e^{2t}(1,0)$.